dialéctica y matemática

José Luis Massera

El material que compartimos fue publicado en la colección *Temas de nuestro tiempo*, por la División Publicaciones y Ediciones de la Dirección General de Extensión Universitaria, de la entonces Facultad de Humanidades y Ciencias, UDELAR, en diciembre de 1985, hace exactamente 30 años. Lo reproducimos aquí por ser de gran interés y de difícil acceso en la actualidad. Con este trabajo culminamos la conmemoración del centenario del nacimiento del Ing. José Luis Massera, al tiempo que recordamos al Ing. Wladimir Turiansky, recientemente fallecido. A estos dos entrañables compañeros, nuestro homenaje.

PRÓLOGO

Las notas que —por iniciativa de la Facultad de Humanidades y Ciencias— se publican a continuación fueron encontradas por el Ing. W. Turiansky entre las pertenencias que retiró del Establecimiento Militar de Reclusión N° 1 (Penal de "Libertad") el día de su liberación. Recogen, sin ninguna elaboración posterior, apuntes y puntos de vista intercambiados entre José Luis Massera, Roberto Markarián y Wladimir Turiansky, cuando los azares de la prisión los reunieron en la misma ala del mismo sector del mismo piso del celdario.

El lector atento distinguirá distintos autores en diversos trozos de las notas, pero se ha preferido mantener el carácter conjunto del escrito porque es difícil precisar, si algún autor no hizo correcciones al texto de los otros y, si la transcripción final que saliera del Penal refleja totalmente lo que cada autor escribiera originalmente.

El trabajo en su conjunto reúne opiniones que los autores intercambiaban en sus pocos momentos de encuentro. O bien durante sus caminatas en los recreos de la prisión; caminatas que por disposiciones de las autoridades del Penal podían ser a lo sumo de a dos. O bien, más furtiva y prohibidamente, cuando podían encontrarse repartiendo comidas o en otras operaciones de rutina de la vida carcelaria. O bien, aún más furtiva y prohibidamente, en "formación", cuando salían para (o entraban) de los recreos, las visitas a sus familiares u otras actividades de "esparcimiento".

Los textos fueron intercambiados entre los autores por diversos mecanismos violatorios de las normas del Penal, entre los que se cuenta el pasaje de una celda a otra en los bolsos en que se guardaban los materiales para realizar manualidades.

Quizás algún día estas notas puedan ser elaboradas en condiciones más propicias, con la posibilidad de consultas bibliográficas y de otros elementos imprescindibles para poder unificar una posición coherente y compartida sobre el tema o, por lo menos, profundizar y precisar las diferentes posturas sustentadas acerca del mismo. [3]

DIALÉCTICA Y MATEMÁTICA

1) En un libro, "Los Principios de la Matemática", publicado a principios de siglo, B. Russell sostiene que la Matemática no es, en suma, más que una rama (o una parte integrante, o un simple derivado) de la Lógica Formal; el objetivo del libro consiste esencialmente en demostrar esa tesis que, por otra parte, encuadra en la tendencia general del análisis de los fundamentos de la Matemática imperante en esa época. En particular, esto lo lleva a minimizar el papel de las definiciones, que para él serían simples abreviaturas; y señala, con muchas apariencias de razón, que en todo teorema en que se habla de entes definidos previamente es posible, sin cambiar nada sustancial en el contenido, reemplazar los nombres de dichos entes por sus definiciones dadas in extenso, de modo que, reiterando este proceso, todo teorema sería una aserción en la cual intervienen sólo constantes lógicas y los conceptos indefinibles de la Matemática (o de alguna de sus ramas), conceptos indefinibles que forman la sustancia de los postulados; de los cuales se suele incluso decir, algo paradojalmente, que constituyen definiciones implícitas de aquellos indefinibles.

Esta opinión se vincula, parecería, a otra de Poincaré según la cual la Matemática no sería sino una gigantesca tautología. Sea como fuere, si efectivamente es cierto lo que dice Russell acerca del contenido real de los teoremas, una vez eliminada la superficialidad de las definiciones, las demostraciones, por largas y complejas que sean, no agregarían nada a lo que ya está contenido en los postulados; en ese sentido, los teoremas serían, efectivamente, sustancialmente tautologías, no muy diferentes de la aserción trivial "A es A".

2) ¿Son justos estos puntos de vista? A mi juicio no. Pero para fundamentar esta opinión parece necesario analizar el papel y la función que juegan, en la matemática, tanto las definiciones como los postulados. Está muy lejos de mí el poner en tela de juicio el carácter lógico-deductivo que tiene la matemática desde la antigüedad griega, y luego el cambio cualitativo que en esa época experimentó al superar el estadio por lo menos parcialmente empírico en que se encontraba en las civilizaciones precedentes; y cuando digo lógico-deductivo queda claro que lo
[5] entiendo en el sentido clásico de las palabras, es decir, el aristotélico metafísico, sin mengua de los nuevos desarrollos y precisiones que las últimas décadas han aportado a la lógica formal. Estos aportes, en cualquier caso, reafirman y acentúan la rigidez y el ascetismo metafísicos de aquel sentido clásico. Cualquier apartamiento, por mínimo que sea, de estas normas es condenable, debe ser eliminado o, más bien, superado.

Sin que deba interpretarse como un subterfugio para atenuar la tajante afirmación precedente, creo importante hacer una digresión. No se la debe interpretar más que como un breve paréntesis, y podrá ser suprimida sin cambiar el contenido de estas anotaciones. La mencionada afirmación se refiere a lo que podríamos llamar la exposición acabada, perfecta, de un teorema o de una teoría matemática, si bien la noción "perfecto" no tiene, históricamente, siempre el mismo significado. Pero lo dicho no es, en absoluto, cierto para el proceso creador que condujo al teorema o a la teoría. Tampoco para lo que se acepta como correcto en tal o cual momento —que, en no pocos casos, debe medirse por siglos— de la evolución de la matemática. Todo matemático creador sabe por propia experiencia que, en el descubrimiento o conformación de un nuevo teorema o teoría, interviene ciertamente, y jugando un papel primordial, la Lógica Formal. Pero también un conjunto más o menos grande de elementos dialécticos: tanteos y ensayos; exploraciones exitosas o fracasadas del terreno; las llamadas intuiciones o revelaciones más o menos súbitas —que el propio Poincaré, admitiéndolas, desmistifica en otro de sus sabrosos pasajes, explicándolas como punto y condensación a un nivel cualitativo superior, de etapas anteriores de reflexión dialéctica— el juego, eminentemente dialéctico, de los intentos de demostración de presuntos teoremas y de la búsqueda de contraejemplos que los niegan —de lo cual es muestra paradigmática el descubrimiento de las geometrías no euclideanas—; etcétera.

En cuanto a la aludida historicidad del concepto de rigor lógico ideal, se ejemplifica en el caso particularmente notorio de las nebulosidades nada perfectas, por cierto, desde el punto de vista estrictamente lógico, en medio de las cuales tuvo lugar el esplendoroso desarrollo del cálculo infinitesimal durante más de dos siglos, y que recién pudieron ser despejadas a fines del siglo XIX con un grado de perfección lógico-metafísico que resultara aceptable para esta última época.

3) Hasta aquí la digresión o paréntesis del que habláramos. Creo que considerar a las definiciones como meras abreviaturas, si bien puede ser un punto de vista defendible desde el ángulo de lo que he llamado el ascetismo lógico-metafísico extremo, no es justo si se las mira en toda la riqueza del papel que efectivamente juegan en el desarrollo de la matemática.

En primer lugar, nadie podrá negar que el origen de no pocas definiciones no sólo no es lógico-formal sino ni siquiera propiamente matemático o científico. Me refiero, claro está, no a las definiciones en la forma acabada en que se presentan en la matemática formalizada, sino a las nociones de objetos, como círculo, juego, etc., que provienen de la experiencia sensible y práctica, y que, luego de ser depuradas [6] de elementos extra-lógicos, ingresan a la matemática pura; en el ejemplo del círculo, en la geometría griega de hace más de dos milenios; en el del juego, en la modernísima Teoría de los Juegos, del siglo XX. Y no nos parece razonable excluir la posibilidad de que este origen empírico de algunas definiciones matemáticas se reitere en el futuro al influjo del desarrollo de la experiencia en general y de la técnica en particular. No parece lícito cerrar los ojos a esta cuestión. Pero, se dirá, y no con poca razón, que desde el momento en que entran en el cuerpo de la matemática formalizada, esas definiciones son depuradas y despojadas de todos los residuos empíricos y reducidas, como decíamos antes, a las constantes lógicas y a las nociones indefinibles. Así, el círculo pasa a ser el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo de ese mismo plano, indefinibles son aquí: conjunto, punto, plano y distancia, o bien equidistar.

4) Sin embargo, aun en este contexto, las definiciones, cuando son apropiadas y sustanciales —y no cabe duda de que tal es el caso para la inmensa mayoría de

aquellas a que nos referíamos más arriba, es decir, las que tienen su origen en el pensamiento empírico-práctico, y dialéctico—. destacan, entre múltiples combinaciones lógicamente legítimas pero desprovistas de interés, ciertos objetos ideales interesantes, sea por su aplicación práctica inmediata (números, figuras geométricas elementales, etc.) sea porque son motivados por la dinámica propia del pensamiento teórico (grupos y otros conceptos del álgebra moderna, espacios no euclideanos de más de tres dimensiones, topológicas más o menos generales, etc.), sea por una aún más compleja dinámica o dialéctica de lo teórico o de lo práctico (juegos, conceptos de la teoría espectral, etc.). Subrayamos aquí la palabra motivados; en última instancia, es lo que podríamos llamar olfato o genio creador del investigador el que selecciona tal o cual definición apropiada y descarta otras, posibles pero sin interés. Sea como fuere, tales definiciones, al crear —no vacilo en usar esta palabra— ciertos objetos ideales, objetos en tanto no son arbitrarios y adquieren una existencia concreta aunque sea en un sentido ideal, promueven esos objetos como un acicate para su conocimiento. Su análisis y comprensión suelen no ser fáciles, a veces son difíciles en grado sumo, hasta el punto de exigir los esfuerzos denodados de muchos matemáticos, a lo largo de siglos, para penetrarlos satisfactoriamente. Tan es así que en no pocos casos (teorema de Fermat, problema de los cuatro colores, etc.) esos esfuerzos han sido hasta ahora infructuosos.

5) En la selección a que acabamos de aludir cabe introducir la idea de fecundidad: una definición puede ser más o menos fecunda, en el sentido de promover amplios desarrollos o teorías, o más o menos yerma sin que esta escasa fecundidad signifique necesariamente ausencia total de interés o utilidad. Cuando más arriba se hablaba de definiciones apropiadas, se hubiera podido también decir sustanciales, fecundas, etc. Los objetos ideales por ellas creados ya no son sólo los meros postulados o los que resulten de las posibles —arbitrariamente indiferenciadas— combinaciones lógicas de los indefinibles y las constantes lógicas. Las grandes e importantes definiciones de la historia de la matemática abren horizontes inexplorados, a veces vastísimos. Inician épocas renovadas de su desarrollo, remueven [7] o conmueven viejos conceptos en toda su estatura, incorporan abundantes cosechas de nuevos conocimientos y llevan a la superación de otros que pasan a ser obsoletos y con frecuencia totalmente olvidados; sugieren a menudo, en esa instancia superior, otras nuevas definiciones que reavivan estos procesos, en una cadena que prácticamente no tiene fin. Son, de ese modo, banderas que se van plantando sucesivamente y señalan derroteros a la investigación, a veces caminos muy escabrosos y escarpados que conducen a cimas desde donde se divisa un panorama deslumbrador. No es raro, inclusive, que esos nódulos del proceso dialéctico que ellas constituyen lleven a profundas crisis que puedan requerir siglos de esfuerzos de matemáticos y filósofos para ser superadas. En todos esos casos, tales definiciones, apropiadas, sustanciales, fecundas, marcan, entonces, saltos cualitativos en el desarrollo de la ciencia.

La evolución de la matemática no es así una mera acumulación cuantitativa de teoremas, concebidos como proposiciones que se encadenan mansamente, unas tras otras por la aplicación de la lógica formal sino una compleja relación dialéctica entre la deducción lógica y la invención y la selección de postulados y definiciones que importan la creación de nuevos objetos ideales, y un toque de atención hacia ellos, y que suelen jalonar los saltos cualitativos más importantes. Vale la pena acotar que tal papel eminentemente creador pueden jugarlo incluso postulados y definiciones más o menos imperfectos y criticables desde el ángulo formal y metafísico; recordemos, una vez más, las tan insatisfactorias definiciones originales de derivada e integral, cuya imperfección formal no les impidió ser durante muchas décadas las palancas que determinaron el crecimiento impetuoso del cálculo infinitesimal, una de las más frondosas ramas del árbol matemático.

La pura lógica formal no trabaja con estos objetos ideales; es más general y abstracta y, por lo mismo, menos rica.

En suma, me parece claro que es sustancialmente distinta de la matemática, pese a la opinión de Russell. Por otro lado, si bien, como ya hemos dicho, puede sostenerse que la matemática, en puridad, es una tautología equivalente a los postulados, la inmensa mayoría de los teoremas que la integran se hallan tan alejados de aquéllos, definiciones mediante, que de hecho configuran un mundo conceptual cualitativamente distinto y, otra vez, mucho más rico que el de la estrecha órbita de los postulados originales; parece abusiva entonces la utilización de aquel término. Contribuye también a cuestionar la visión tautológica el hecho de que ese alejamiento de los postulados no consiste en el simple alargamiento de las cadenas deductivas lógico-formales, sino que incluye las novedades cualitativas introducidas por las definiciones, tanto cuando ellas son sugeridas por el fértil caldo de cultivo de la práctica, la experiencia sensible y los problemas de otras ciencias, como cuando son el resultado de los procesos de rigorización formal, de generalizaciones, de la eliminación de adherencias y excrecencias no esenciales, etc., que se dan en el interior de la matemática misma, como ya se ha dicho. [8]

6) En fin, y para dar término a estas anotaciones, cabe referirse a los procesos de génesis y mutación de los postulados mismos. El filólogo y filósofo Stoll ha mostrado convincentemente cómo el sistema de postulados de Euclides debe interpretarse en gran parte como una respuesta a las perplejidades suscitadas por las férreamente metafísicas doctrinas de Parménides y las finas popularizaciones de ellas que constituyen las aporías de Zenón. Basta pensar, por ejemplo, en el postulado, sutilmente insólito, que afirma que el todo es mayor que las partes, contrarréplica evidente de una de esas célebres aporías. En verdad, el admirable ascetismo lógico-metafísico de Parménides no podía menos que conmover hondamente el esfuerzo de los griegos de entonces por fundar el conocimiento de la deducción lógica. El diálogo platónico que lleva el nombre del gran presocrático es, precisamente, una abundante colección de parejas de proposiciones contrarias en que, tanto la una como la otra de las integrantes de la pareja inevitablemente conducen a contradicciones lógico-metafísicas por poco que se aparten de la tautología extrema: el ser es. Pero ello importaría negar lo más profundo del conocimiento y la práctica humana, y reducir la ciencia a aquella solitaria y estéril afirmación.

Según Stoll, el significado de los postulados euclideanos sería el de sentar algunas bases para el desarrollo de razonamientos fecundos, aun a sabiendas de que esas bases, los postulados, son muy vulnerables a una crítica severa como la parmenideana.

7) Ahora bien, la matemática en su conjunto, aun en sus capítulos más "finitistas", es, por antonomasia, la ciencia del infinito; y éste es el más prolífico engendrador de contradicciones, en el sentido metafísico, como lo demostró cabalmente, entre otros, Zenón —"¡El infinito!"— y exclamaba Hilbert: "Ningún otro problema ha perturbado tan profundamente el espíritu del hombre". Es inevitable, entonces, que tales contradicciones aparezcan abundantemente en el curso del desarrollo histórico de esa ciencia. A. Denjoy decía: "Todas estas formas diversas con las cuales en distintas oportunidades el infinito se ha introducido de una manera diferente, cada vez, en la matemática, han revelado la pobreza de la lógica que los lógicos de entonces tenían por un mecanismo infalible para producir verdades seguras". Y aseguraba: "La lógica ha aprendido, modestamente, humildemente, las reglas del razonamiento justo en esas cuestiones nuevas para ella. Lo racional en matemática, como en otros casos, se vuelve a templar periódicamente en lo empírico para adquirir fuerzas que no puede hallar en sí mismo".

A mi modo de ver, las perplejidades y crisis que con frecuencia desencadenan estas circunstancias tienden a ser solucionadas por métodos análogos a los empleados por los griegos hace dos milenios, a saber, rechazando y relegando hacia los postulados, enjaulando en ellos, por así decirlo, para hacerlos inofensivos y dejar el campo libre para el despliegue de la lógica formal, a los demonios de la dialéctica inherentes al infinito. Un ejemplo de ello es el método ε. δ, con el cual se llevan al terreno de la teoría de los conjuntos, en concreto, a la pertenencia o [9] no pertenencia de un punto al conjunto de puntos que forman un entorno, lo que permitió aclarar las mencionadas nebulosidades del cálculo infinitesimal. Tengo la convicción de que, en la matemática actual, la teoría de los conjuntos ha absorbido prácticamente todos los residuos molestos de elementos dialécticos del resto de la matemática. Pero ¡allí habitan los demonios!, como diría el célebre matemático alemán. ¿Han sido verdaderamente domesticados allí? ¿Es realmente impecable, exenta de contradicciones lógico-metafísicas la teoría de los conjuntos? ¿Se han superado totalmente las antinomias que en ella proliferaron a comienzos de siglo, entre las cuales una de las más célebres se debe, paradojalmente, al propio Russell? No estoy técnicamente capacitado para responder de una manera categórica a estas interrogantes, cuya dilucidación plantea intrincadísimos problemas. Es probable que la respuesta sea negativa, y que el proceso de encerrar demonios de la dialéctica —que pueden aparecer en nuevas formas en el desarrollo futuro de la ciencia— en las jaulas de los postulados cada vez más estrechas y seguras, continuarán en el futuro, incluso indefinidamente, y que ése seguirá siendo uno de los campos, que podríamos denominar del crecimiento, en el desarrollo del árbol de la matemática y de cada una de sus frondosas ramas.

MATEMÁTICA, LÓGICA Y DIALÉCTICA

¿Cuál es el objeto de las matemáticas? ¿Cuál el de la lógica? ¿Se identifican? ¿Cómo interviene la dialéctica?

1) En una definición general, se podría decir que el objeto de las matemáticas es estudiar las propiedades y las relaciones de objetos o entes matemáticos, definición medio perogrullesca en tanto no se explique a su vez qué se entiende por tales objetos o entes matemáticos.

En su comienzo como ciencia tales entes eran los números, las magnitudes, las figuras. No eran pues en absoluto arbitrarios ni pura creación de la mente humana. Eran el resultado de un largo proceso de abstracción, generalización y síntesis, producto a su vez de la relación (o acción) del nombre con (o sobre) la naturaleza.

Lo que en una etapa anterior eran propiedades, más o menos generalizadas, de los objetos materiales, pasan a ser objetos ellas mismas, se abstraen de su envoltura material o concreta, y como tales pasan a ser el tema de estudio de las matemáticas.

Sin embargo, en el transcurso del tiempo van apareciendo nuevos entes matemáticos, cada vez más complejos, más ricos de contenido y a la vez más y más despegados de la realidad física —la matemática "despega" como ciencia de la física— y surge, en las modernas discusiones en torno a la naturaleza de las matemáticas, el tema de la libertad y la arbitrariedad en la introducción de nuevos conceptos o en la definición de nuevos entes matemáticos. ¿Es enteramente libre y arbitrario este enriquecimiento constante de la matemática? ¿Cómo se produce este [10] proceso? Más bien parecería que es la consecuencia de la dialéctica implícita en el mecanismo del pensamiento, que es la consecuencia de la generalización y de nuevas propiedades y relaciones que en el trabajo matemático van surgiendo entre los entes con que originariamente se comenzó a trabajar.

Incluso esos entes van perdiendo el carácter intuitivo original (caso típico de lo cual es el salto que va del concepto de número natural al de complejo) y no sólo han perdido su envoltura material sino que cada vez aparecen, o parecen, más ajenos al mundo de la naturaleza y, más y más, productos arbitrarios de la imaginación creadora del hombre.

Está claro que la aparición de nuevos entes matemáticos no tiene lugar sólo "desde dentro". También "desde fuera". Porque, al fin de cuentas, las matemáticas nacen y crecen como resultado de necesidades materiales, y aun separada modernamente de la física, ésta le introduce constantemente nuevos problemas, nuevas nociones, nuevas propiedades de la materia, y, abstrayendo y generalizando, ... nuevos entes matemáticos. Y entonces hay, además de números (rarísimos números, por otra parte), magnitudes y figuras, funciones, vectores, derivadas, integrales, espacios, conjuntos, en fin, una buena colección de entes matemáticos, el estudio de cuyas propiedades y relaciones es tema de las matemáticas.

Es de esperar que este proceso continúe, pero aun concediendo una buena dosis a la más pura creación mental, no parece que este proceso creador sea arbitrario ni que se pueda hablar de la "libertad" matemática. Me refiero a una frase de Cantor y un comentario de Hilbert que acabo de leer. Dice Cantor: "La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y basta con que los conceptos no sean contradictorios y estén coordinados con los conceptos introducidos anteriormente por medio de definiciones precisas". Por su parte Hilbert comenta, tal vez por vía de exageración, que tanto da hablar de punto y recta que de mesa y cigarrera, por ejemplo, o algo por el estilo.

Precisamente, si tanto diera una cosa como la otra, es decir si todo se reduce al proceso formal del razonamiento lógico deductivo, y si rige la arbitrariedad en la creación de objetos o nociones, parecería que las matemáticas serían condenadas poco a poco a la esterilidad. En esto entra, me parece, la idea de la "fecundidad" de las nuevas nociones creadas, fecundidad que tal vez dependa precisamente de un proceso creador, ni arbitrario ni libre. Al fin, mirando por supuesto desde fuera, uno tiene la presunción de que el matemático en su labor creadora arranca siempre de problemas previamente planteados. Su trabajo lo puede llevar por supuesto a la exploración o descubrimiento de nuevas cosas, pero no parecería que se siente a pensar "libremente" y de una manera arbitraria.

2) Por otro lado, ¿cuál es, a su vez, el objeto de la lógica? ¿Se puede decir que estudia las reglas de una de las formas del pensar, expresamente el razonamiento [11] deductivo, o debe abordar las leyes del pensamiento en todas sus formas, en toda su generalidad? Por lo menos la lógica clásica trabaja con las leyes del razonamiento deductivo, y solo se remite a reconocer la validez o la no validez de un razonamiento en tanto cumple las leyes (que, dicho sea de paso, todos aceptamos como correctas en forma natural e intuitiva, ¿por qué?) sin importarle la verdad o falsedad del postulado inicial. Si se ha razonado correctamente, y el punto de partida es verdadero, la conclusión también lo es, y si el punto de partida es falso parecería que nada se puede decir sobre la verdad o falsedad de la conclusión.

En lógica formal no cabe pues hablar de la verdad o falsedad de una conclusión, sino de la validez o no del proceso de razonamiento. (El clásico silogismo del liceo —dicho sea de paso, Aristóteles se la agarró con Sócrates y ya nunca más lo dejaron tranquilo—: 1) todos los hombres son mortales, 2) Sócrates es un hombre, 3) Sócrates es mortal, es lógicamente válido si se arranca diciendo que todos los hombres son inmortales y se concluye en que Sócrates es inmortal. A su vez, también se puede partir de un postulado falso, por ejemplo "no todos los hombres son mortales", luego "Sócrates es un hombre y luego afirmar introduciendo una nueva propiedad: "los hombres nacidos en Grecia son mortales"; "Sócrates es hombre y es nacido en Grecia" y llegar a una conclusión verdadera: "Sócrates es mortal"

Ahora, es claro que todo esto tiene traducción matemática.

En el lenguaje de la teoría de conjuntos podríamos:

1°) Definir dos conjuntos: A, conjunto de todos los hombres, B, conjunto de todos los mortales y expresar el silogismo original así:

$A \subseteq B$, $A \neq \Phi$, $B \neq \Phi$

$x \in A \rightarrow x \in B$ (por definición de inclusión)

2°) En el otro caso podemos definir:

A = conjunto de todos los hombres mortales. $A \neq \Phi$

B= " " " " " inmortales. $B \neq \Phi$

C = " " " " " nacidos en Grecia. $C \neq \Phi$

Las proposiciones serían:

$C \subseteq A$, $C \cap B = \Phi$

$X \varepsilon C \rightarrow X \varepsilon A$, y, X no εB

Una identificación de la matemática con la lógica implicaría despreocuparse de la verdad o de la existencia de las nociones o los objetos que se introduce (esto aparece en el hecho de poner $B \neq \Phi$). Cabe preguntarse si esto es válido.

3°) Por otra parte, ¿dónde aparece la dialéctica en las matemáticas? En primer término, ¿es lícito contraponer la lógica formal o aristotélica a la dialéctica? ¿Se puede hablar de una lógica dialéctica en oposición a la lógica formal? Parece un [12] asunto dudoso. Si circunscribimos la lógica formal al conjunto de leyes que rigen un aspecto sólo parcial del proceso del pensar, esto es, el razonamiento deductivo, está claro, parecería, que la dialéctica no aparece como contrapuesta a la lógica, ni como sustitutiva de ésta, sino como la expresión en el pensar del modo de actuar de la materia que siempre es materia en movimiento. Las leyes de la dialéctica son las leyes de la materia en movimiento, son las leyes del desarrollo, en la naturaleza y en las sociedades. El pensamiento dialéctico reflejaría así la riqueza y la complejidad de la realidad exterior cambiante, esa que no nos permite "bañarnos dos veces en el mismo río". Tal vez la lógica nos permite enunciar leyes y deducir consecuencias de los fenómenos naturales, aun en su "quintaesencia" matemática, en la medida en que de alguna manera los fijamos. Pero cuando se trata precisamente del estudio de la materia en movimiento, de la materia en "continua" variación, aparecen los problemas, la lógica se hace insuficiente y surgen las paradojas. En la clásica paradoja de Zenón sobre Aquiles, la tortuga ¿no reflejaría precisamente esa situación? Al fin, toda la teoría sobre series, que hoy permite resolver en forma matemáticamente rigurosa ese problema, y muchos otros, ¿no implica un previo salto dialéctico en la introducción del concepto de límite? Parecería que la traducción matemática de ese carácter esencialmente variable de la materia, aquello de que la materia *es* materia en movimiento, o sea, la abstracción y generalización de esa característica esencial de la materia sería la idea de continuidad y sus consecuencias, la noción de infinito y de infinitésimo.

La formalización de esos conceptos —como de otros— es realizada por el matemático mediante las definiciones y los postulados —"enjaula los demonios de la dialéctica"— porque el método de trabajo de las matemáticas es lógico-deductivo, pero la no arbitrariedad e incluso la comprensión de las nociones así introducidas sólo es posible pensando dialécticamente.

Así, parecería que la dialéctica está presente, por un lado, en la pura labor creadora, y por otro en el seno mismo de las matemáticas, en la medida en que éstas acompañan el desarrollo y la profundización del conocimiento de la naturaleza de las cosas, abstrayendo y formalizando nociones que, en definitiva, sólo provienen de la dialéctica de la naturaleza. Tácate.

En resumen:

1) El método de trabajo de las matemáticas es lógico-deductivo.

2) Aceptamos sin discusión como válidas las reglas de la lógica formal porque son la condensación de la experiencia y de la crítica.

3) Los objetos de la lógica son conceptos sin definición.

4) Los objetos de la matemática son conceptos definidos.

5) Los objetos de la lógica pueden o no tener existencia.

6) Los objetos de la matemática tienen existencia. [13]

7) La dialéctica aparece en las matemáticas en forma implícita en el proceso creador del pensamiento, y en forma explícita en el campo de las matemáticas que aborda, matemáticamente, los problemas de la materia en movimiento. Tácate, tácate.

CRÍTICA

1) Acuerdo en que el proceso de creación de nuevos entes matemáticos no es arbitrario, en lo fundamental. En ese sentido la frase de Cantor es demasiado tajantemente unilateral. En cuanto a la de Hilbert, es otra historia; no es una exageración y responde a otros motivos. En sus trabajos sobre la axiomatización de la geometría se vio llevado (y fue correcto que así fuera) a expurgar meticulosamente la geometría de todo residuo, a menudo casi imperceptible, de intuiciones que se introducen inadvertidamente en el proceso de la deducción lógica. Dando por sentado que el modelo, en general, debía ser el lógico-deductivo de Euclides (y no sólo que esto sea tema de controversia), había que expurgar de esas intuiciones al modelo que, 2000 años después, aparecería plagado por ellas.

Eso significaba eliminar las presuntas, engañosas e inútiles definiciones de los conceptos primarios (punto, recta, etc.), eliminar la distinción entre axiomas y postulados, y completar el sistema de éstos con muchos nuevos, que Euclides ni sospechó y que seguramente le habrían parecido muy extraños. De tal modo que del nuevo sistema de postulados se pudiera deducir por pura lógica formal todo el cuerpo de la geometría. Este ideal (que, creo, 100 años después se sigue considerando bien alcanzado) reclamaba una actitud mental en que las palabras punto, recta, etc., no estuvieran asociadas en el razonamiento a ninguna representación intuitiva de las cosas a las que en la realidad material damos esos nombres, y que en sentido estricto no existen en la realidad material, en que a lo sumo hay cosas que, dentro de un cierto margen de aproximación, tienen propiedades aproximadas a lo que aquellas abstracciones significan.

Para subrayar este aspecto (esencial si aceptamos rigurosamente el modelo lógico-deductivo), Hilbert empieza su libro Fundamentos de la geometría diciendo, más o menos, así: "Consideraremos tres clases de cosas a las que llamaremos puntos, rectas y planos, que supondremos que satisfacen los siguientes postulados..." y luego aplica la lógica formal con crueldad implacable. En este sentido, es cierto que todo el libro vale si se reemplaza punto por mesa, recta por cigarrera, etc., supuesto que estas "cosas" efectivamente satisfacen los postulados (lo que no es cierto). Si Hilbert mismo, en el libro o fuera de él, efectivamente habló de mesas, cigarreras, etc., ello no es improbable, sobre todo teniendo en cuenta las peculiaridades del humorismo alemán. Hasta aquí Hilbert y su actitud ante un problema, como se ve, distinto al de Cantor. Puede preguntarse: ¿es que hay "cosas" que no se parezcan a lo que corrientemente llamamos punto, recta, [14] etc., y que satisfagan los postulados?

a) Ya he dicho que, como objetos materiales en el sentido estricto, *no* existen cosas que satisfagan los postulados y, desde ese punto de vista, carece de sentido hablar de que se parezcan o no se parezcan al significado intuitivo usual. Por otro lado, lo del "parecido" no cabe en la lógica formal. Gracias a Dios (o más bien gracias a que aquellas abstracciones tuvieron origen en la experiencia físico-sensible) y abusando un poco del lenguaje puede decirse que, en la medida en que las cosas a las que corrientemente damos esos nombres satisfacen "aproximadamente" (?!) los postulados, también sucede eso con los teoremas que se deducen. Pero esto ya no es matemática sino física o lo que sea, en que la matemática no es más que un instrumento para ayudarnos a captar la realidad... o en lo que no nos ayuda a ello (por ej. en la teoría de la relatividad).

b) No en la geometría euclidiana, pero sí en una muy emparentada, la geometría proyectiva, todo el cuerpo de ésta, incluidos los postulados, es perfectamente simétrico, en el sentido de que pueden intercambiarse las palabras punto y plano, sin tocar la palabra recta, y se obtiene exactamente lo mismo. Dicho en forma intuitiva, si en la geometría proyectiva reemplazamos las palabras punto, recta, plano, en el sentido intuitivo, los resultados son tan ciertos como antes, a pesar de que como "cosas" intuitivas un punto y un plano son completamente diferentes, aunque quizás no tanto como un punto y una mesa. Este ejemplo me parece que muestra cómo la posición que toma Hilbert no sólo es metodológicamente acertada (como garantía, hasta donde nuestro cacumen puede percibirlo, contra contrabandos intuitivos extralógicos) sino que efectivamente hay casos como en la geometría proyectiva en que las "cosas" pueden ser cualitativamente muy diferentes entre sí y, sin embargo, el mecanismo lógico-deductivo funcionar de una manera absolutamente idéntica, con los mismos resultados y la misma eficacia.

c) Para tranquilizarse, en cierto modo, se demuestra (creo que lo hizo el propio Hilbert) que la axiomática de la geometría euclidiana es categórica, en el siguiente sentido: si hay dos sistemas de cosas, llamémoslas *cosas-1* y *cosas-2,* por muy diferentes entre sí que sean cualitativamente, y ambas satisfacen los postulados, las "geometrías concretas", llamémosles así, o sea la geometría-1 y la geometría-2, son necesariamente isomorfas, es decir, que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las *cosas-1* y las *cosas-2* de modo que toda propiedad (teorema) que cumplen aquéllas, en esta especie de traducción o diccionario, se transforma en una propiedad que cumplen éstas, y recíprocamente.

Dicho de otro modo, hay una y una sola geometría euclidiana super-abstracta, que es esencialmente la misma (a menos de un isomorfismo) cualquiera sea la interpretación correcta que se dé a las "cosas" punto, recta, plano; como si dos de ellas fueran nuevas (y perfectas) traducciones de una misma obra a dos idiomas. (Pero, atención, hay muchísimas y muy importantes estructuras matemáticas que no tienen esta peculiar propiedad de la categoricidad).

2) Sobre el problema de la libertad o, más crudamente, de la arbitrariedad en la creación de objetos y el problema de la fecundidad o esterilidad consiguientes. Como ya está dicho, coincidiendo en general, es inevitable hacer salvedades. [15]

Algunos casos y situaciones: a) cuando las definiciones están sugeridas por el desarrollo interno de las matemáticas o por necesidades de otras ciencias, la libertad y la arbitrariedad se limitan más o menos fuertemente y la fecundidad está bastante asegurada; b) sin embargo, aun en esos casos es frecuente (creo que se podría decir lo más frecuente, pero dejémoslo pasar) que en el momento en que surgen esas definiciones, ellas no están determinadas por una necesidad que las imponga a ellas precisamente y no a otras, o sea, no hay una clara marca de nacimiento que permita dar ciertas seguridades acerca de su fecundidad.

Por ejemplo, cuando Apolonio hace su maravilloso estudio de las cónicas no respondía a una necesidad importante de la matemática (podría haber inventado otras cosas *mucho* más esenciales como, por ejemplo, el cero). Ese estudio fue un nuevo juego (apasionante como el ajedrez, pero juego al fin), prácticamente carente de aplicaciones o consecuencias importantes para la matemática u otras ciencias durante casi 2000 años, hasta que Kepler, Newton y compañía descubrieron que existían en ciertos fenómenos naturales; por inercia y por elitismo intelectual se siguieron estudiando y enseñando durante ese lapso y unos pocos siglos más. Pero actualmente se les da cada vez menos importancia: en muchas Universidades la geometría proyectiva se ha suprimido lisa y llanamente de los planes de estudio, y lo poquito que queda vivo de las cónicas no pasa de ser un ejemplo, útil a lo sumo como fuente de ejercicios de geometría analítica dado que se lo puede considerar intermediario entre la geometría lineal y las curvas más generales. La definición primitiva de secciones cónicas, que les da el nombre, ya nadie la usa; y, en todo caso, el tema importante que queda ahora es el algebraico de la forma cuadrática, su clasificación, etc., a propósito del cual se suele *decir,* con una reverencia póstuma al bueno de Apolonio, que, en el caso particularísimo de dos variables, la clasificación de las formas tiene que ver con la de ciertas curvas, precisamente las cónicas. En vista de toda esta historia, ¿cómo contestar a estas preguntas? ¿Fue una necesidad interna o externa la que impuso su estudio a lo largo de 2000 años? Creo que no. ¿Fue útil? Como ejercitación, casi como gimnasia para generaciones de matemáticos, creo que sí. ¿Fueron fecundos para la matemática u otras ciencias? Muy poco, casi nada. Pero ahí están, o estuvieron, y con enormes salvedades, no vacilo en decir: ¡bendito sea Apolonio! Los ejemplos se podrían multiplicar; uno podría ser el metejón, particularmente de algunos *grandes* matemáticos ingleses, por algunas cuestiones algebraicas que proliferan frondosamente hace 100-200 años y de las que actualmente ya nadie se acuerda, en gran parte por haber sido englobadas y superadas por la llamada álgebra moderna. (En la biblioteca de la Facultad, por ejemplo, hay un tratado sobre determinantes de Muir, no recuerdo si en dos o cuatro gruesos tomos de varios cientos de páginas cada uno, y dudo que exista un solo matemático actual que los consulte, como no sea por motivos históricos; es un verdadero fósil matemático.) Sin embargo, yo no diría que estas cosas fueron inútiles. Por otra parte, muchas veces la aspiración al doctorado y la necesidad de mantener y mejorar el *status* del personal docente (caso típico: las Universidades de Estados Unidos, que exigen entre otras cosas un cierto nivel [16] de productividad de investigaciones originales) ejerce una presión muy fuerte que muchas veces se satisface con trabajos sobre ciertos objetos más o menos arbitrarios, y hasta fabricados ex-profeso para que sobre ellos se pueda escribir algunas páginas y demostrar algunos teoremas. En líneas generales, esto llevaría a un descenso de calidad, fecundidad, etc.; pero aun entre los matemáticos más duchos ¿quién se atrevería a "vetar" a un moderno Apolonio? Salvo algunos pocos casos muy claros, por estúpidos, o por excelentes, a priori, es casi imposible predecir la mayor o menor fecundidad que puede tener una definición, menos todavía cuando esta fecundidad puede no manifestarse directamente en la vida y florecimiento de la definición primitiva o por un rebote indirecto que ella puede provocar, aunque ella misma esté condenada a la muerte por olvido, algo así como los zánganos entre las abejas. En esta cuestión juega mucho un cierto "olfato" que los mejores tienen para apreciar, con cierta probabilidad de certeza, los estudios nuevos; pero ¿cómo definir y medir ese "olfato"? En la práctica, y sin perjuicio de que sería deseable atenuar o eliminar la aludida "presión" académica, es muy difícil, por no decir imposible, coartar las famosas libertad y arbitrariedad en la creación de nuevos objetos matemáticos.

3) Lógica formal. Siendo correcta en general, no creo que sea justo decir que todos aceptamos como correctas sus leyes en forma natural e intuitiva. En última instancia, estas palabrejas no quieren decir nada, o muy poco, salvo como abreviaturas de explicaciones más claras, prolijas y complejas; además, lo "natural" y lo "intuitivo" tienen su historia; no han sido, ni son, ni serán siempre lo mismo. En líneas generales, puede decirse que esas leyes son el fruto condensado en forma abstracta de la experiencia de muchísimos milenios de pensamiento y práctica de toda la humanidad, tanto de "letrados" como de gente común, y cambian, se corrigen y enriquecen en la medida en que esta experiencia se amplía, en particular, con la incorporación en el último siglo de toda clase de objetos matemáticos insólitos, extraños y que hasta parecen absurdos a la "intuición" de gente no familiarizada con ellos. Si se sigue, en particular, la evolución del método del pensamiento griego en los siglos V y IV a.C., se ve cómo se pasa de los errores lógicos múltiples y groseros de los sofistas y de Sócrates-Platón (y en los

que, creo, ellos caían de buena fe; en todo caso no eran rechazados y protestados por sus lectores ilustrados, bastante numerosos) hasta la relativa perfección lógica de Aristóteles, cuyas leyes fueron aceptadas como verdaderas hasta las dudas y precisiones introducidas en los últimos cien años. Entre otras cosas, esa traducción del silogismo al lenguaje de los conjuntos es la llamada versión extensiva de la lógica y no hace más que trasladar las dificultades de una fundamentación racional (o sea, lógica...) de la lógica a las dificultades de la fundamentación de la teoría de los conjuntos, problema no resuelto y que, en mi opinión, no tiene solución, sino que es un proceso dialéctico interminable. Por otra parte, se ha dicho que cabe preguntarse si es válido despreocuparse de la existencia de las nociones o los objetos que se introducen. Bien, pero antes hay que hacer otra pregunta: ¿qué quiere decir "existencia"? Si se trata del reflejo "perfecto" de cosas existentes [17] (objetivamente) en el mundo material (en el sentido ordinario de la palabra), entonces hay que decir, repitiéndome, que puntos, rectas y planos (en el sentido "intuitivo" usual) *no* existen. Yo diría que nada, o casi nada de la matemática existiría.

¿De qué existencia cabe hablar cuando se trata de la suma de una serie convergente o de un espacio de infinitas dimensiones? Y sin embargo son la sal de la vida... matemática. Según la célebre frase, "nadie podrá jamás expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros". Y, sin embargo, grandes matemáticos modernos (entre ellos Weyl, quizá el más grande de todos los del siglo XX) tienen grandes dudas y siembran los caminos de ese Paraíso con cartelitos "Prohibido pasar por aquí" (la corriente llamada ¡"intuicionista"!); y la inmensa mayoría de los Adanes y Evas matemáticos modernos, que siente inmenso respeto por esos matemáticos, no les hace caso y muerde con delicia los más prohibidos frutos del Árbol de la Ciencia...

4) Y bien, *todo* lo dicho anteriormente (más reflexiones anteriores, y mucho más) *es* dialéctica, o más explícitamente complejísima dialéctica (con carácter histórico, por supuesto) entre lógica formal, dialéctica, deducción, inducción, intuición, contradicciones dinámicas múltiples, etc.

¿Se puede hablar de lógica dialéctica? Lo dudo, o quizás no lo entienda; pero hay (o ha habido) respetabilísimos señores que han escrito gruesos libros sobre eso. Las leyes de la dialéctica son las leyes de la materia en movimiento, y por ende, del pensamiento que la refleja; pero también hay dialéctica en el propio pensamiento en tanto refleja propiedades de *objetos* ideales pre-existentes en el pensamiento. En ese sentido, hay incluso dialéctica de la lógica formal, que no es la misma en Platón, Aristóteles y en los lógicos modernos, y que evoluciona históricamente como todas las cosas, materiales (en el sentido vulgar) o ideales (pero que tienen una existencia objetiva *sui generis*). Claro que la teoría de las series implica el salto dialéctico del concepto de límite. Pero: a) ¿Qué quiere decir que eso permite resolver en forma matemáticamente rigurosa el problema? En el fondo la "resolución" consiste en encerrar los demonios de la continuidad y el límite en la jaula de la teoría de los conjuntos; esto "limpia" bastante de demonios la teoría de las series, pero convierte en un infierno superpoblado la de los conjuntos. ¿Se ha resuelto así rigurosamente el problema?

b) Hay diferentes, infinitas definiciones de suma de serie; y si bien una de ellas, la clásica, es con mucho la más usada, hay otras, contradictorias con ella, muy útiles, por ejemplo, la que afirma que 1-1 + 1-1 +... = 1/2. Dicho sea de paso, Euler hacía con la mayor frescura estas cosas y no se equivocaba *nunca,* aunque propiamente, no sabía bien lo que hacía.

5) Las salvedades aunque gordas incluyen por supuesto al resumen, bastante compartible, aunque sea porque el 7 es un número mítico y sagrado como pocos. [18]

OTRAS NOTAS

1) Ninguna teoría contradictoria puede abarcar aspecto alguno de la realidad en su totalidad. Las llamadas ciencias exactas han tendido a elaborar teorías que reflejan un sector de la realidad y permiten proveer sobre él, a partir de ciertos vínculos con la naturaleza incluidos en axiomas, principios e incluso los denomina dos teoremas o leyes que aparecen como resúmenes más o menos inmediatos de la experiencia. Por ejemplo, los dos postulados de la relatividad einsteniana aparecen como menos inmediatos que los no explicitados de la física clásica (simultaneidad, invariancia de longitudes y tiempos). Otros ejemplos, por otros sectores de la física: ley de Bermoulli (¿?) de la hidrodinámica, leyes ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. El asunto parece ser igualmente válido en la química, en la cual las diversas leyes descubiertas en los siglos XVIII y XIX van quedando como resúmenes didácticos deducibles de los postulados —por llamarlos así— de la mecánica cuántica que explican el comportamiento de la micromateria (estructura atómica y molecular, valencia, movimiento de electrones) y seguramente en la genética y otras ramas de la biología se dan características semejantes.

En todas esas teorías, a partir de vínculos "postulados" (del verbo postular) con la realidad, se hacen elaboraciones que siguen los principios de la lógica —incluyendo aquí las aclaraciones del ítem y de la crítica— o, para evitar la discusión sobre esta ciencia, se hacen elaboraciones racionales, en muchos casos matematizadas, que son consideradas válidas como la forma corriente del pensar de la humanidad históricamente considerada. Se hacen elaboraciones, pues, que permiten deducir nuevos resultados o incluir en un contexto más amplio, simple y armónico los resultados, conclusiones o constataciones anteriores de la teoría. Einstein observa con suma delicadeza cómo "su" relatividad evita hacer agregados (postulados) a la electrodinámica de Maxwell para explicar los movimientos de los electrones a altas velocidades o la experiencia de Michelson-Morley, y las mismas leyes de Maxwell incluyen las de Faraday, Oersted, etc. Así, la dialéctica de la naturaleza aparece en la exposición sistemática, ordenada de cualquier teoría (en la ciencia, referida al principio, en principio) relegada a esos postulados vinculatorios, y esto no quiere decir que la dialéctica no esté presente en la teoría pues ésta obviamente incluye los postulados y también los múltiples frentes abiertos de investigación por los que la rica realidad se va a seguir colando, incrementando los elementos contrapuestos hasta la medida de provocar saltos y necesarias modificaciones y perfeccionamientos de esos principios. Además el cuerpo lógico de la teoría abraza a la realidad en un equilibrio relativo, constatación ésta que no ignora la mucha mayor riqueza presente.

2) Acerca del claro valor heurístico que estos postulados tienen en todas las ciencias caben algunos comentarios. La buena elección de estos postulados "vinculatorios" con la realidad ha permitido dar numerosos saltos al conocimiento humano, y aquí lo bueno no se refiere a ningún carácter mágico, sino a resumir brevemente sectores más amplios y/o profundos de la realidad; o sea, no es que se [19] pueda elegir cualquier cosa como fundamento de la elaboración de una teoría, sino que la fecundidad de esos fundamentos va a depender del tipo de problemas que se enfrenten en un momento histórico concreto, de la capacidad de arrojar luz sobre diversos sectores de la teoría o teorías adyacentes. Por ejemplo, más allá de que la teoría ptolomeica y copernicana explicaban los mismos fenómenos con grados parecidos de exactitud, es imposible olvidar el profundo carácter inventivo y arrojador de luz sobre los más amplios sectores del conocimiento y de la ideología que tuvo la elaboración de Copérnico, y el hecho que Galileo no pudiera separarse de la esfericidad de la Tierra no disminuye el inmenso aporte que su presentación del principio de inercia tuvo para la creación de la mecánica (aunque parezca extraño, el haber logrado ignorar el rozamiento de los movimientos fue uno de los grandes aportes galileanos).

Claro es que este asunto de la elección de los principios está relacionado, o se puede mirar desde otra faceta, con el desarrollo de la experimentación, la observación, la técnica de laboratorio, etc.

3) Todos estos largos prolegómenos tienden a presentar la similitud de la matemática con todas estas ciencias en que el vínculo con la realidad aparece más explícito, y el carácter "nutricio" de la naturaleza más directo. Pero no creo que la matemática escape al esquema general esbozado. Es cierto que se puede observar una mayor autonomía de la matemática en relación con las necesidades materiales, pero no es menos cierto que todas las ciencias tienen su dinámica propia, sus elementos específicos que las hacen marchar en sentidos muchas veces inesperados; y eso tiene que ser progresivamente más válido para ciencias crecientemente abstractas, o que tratan con objetos más generales. Pero esta independencia e imprevisibilidad no han llegado al extremo de hacer de las ciencias exactas un extenso alambique infértil, como no han hecho de la matemática un conjunto de disquisiciones estériles con objetos que nada tienen que ver con el mundo. Por el contrario, grandes sectores de la matemática siguen impulsados por las necesidades de otras ciencias o como consecuencia profunda de globalizaciones productivas de la misma ciencia, que luego van a permitir enfrentar con renovados bríos otras ramas y reflejarse en otras ciencias.

¿O acaso nuestros sistemas dinámicos no se vieron impulsados hasta su financiamiento por los viajes espaciales, y las increíbles posibilidades de la cibernética no llevaron a destinar grandes matemáticos que originariamente cultivaban otras ramas a disciplinas relacionadas con ella? Y me refiero a dos ejemplos de la 2ª mitad del siglo XX, para no hablar de los más conocidos (véase "La matemática; su contenido, métodos y significado").

4) Así, pues, no es extraño que también en la matemática los "demonios" de la dialéctica estén encerrados en los postulados y que cuando las contradicciones surgen haya que ir al sótano de los demonios para resolverlos y pinchándose con ellos aclarar un poco las cosas. No es secundario a los efectos de esas reflexiones que toda la teoría de conjuntos, la discusión de los fundamentos de la matemática [20] gire siempre refiriéndose a presentaciones que incluyen a los números naturales (caso típico, teorema de Godel), el vínculo más "verdadero" y firme de la matemática con la realidad. Incluso para tocar un tema incidental, la definición de convergencia de series habitual, "la más usada", la que permite resolver las paradojas zenonianas, es esencialmente intuitiva, derivada de la experiencia, al ir sumando trozos cada vez más pequeños (de longitudes, para quedarnos en una dimensión) acercándonos a lo que llamamos la suma.

5) Incluso el carácter crecientemente abstracto de los entes matemáticos es paralelo a la profundización del conocimiento en todas las ramas, el carácter cada vez menos intuitivo de los objetos estudiados por la física, la química o la biología. Alguien ha dicho con razón, creo que hablando del empirio-criticismo, que la velocidad finita de la luz es una abstracción (o se concibe en un proceso de abstracción), así como la existencia de partículas virtuales que duran millonésimas de segundo, el acortamiento de los objetos a altas velocidades, el carácter corpuscular de las ondas luminosas y la trasmisión de la herencia a través del acoplamiento de moléculas de ácidos nucleicos; todo eso tiene tal nota de racionalización en su comprensión que se hace difícil decir que son observaciones de la experiencia. Pero cualquier dificultad de este tipo no le quita su carácter objetivo, real, material, su carácter independiente de nuestra conciencia. En los conceptos y leyes matemáticos, su génesis y sus vínculos con la realidad —en el sentido más amplio— sucede lo mismo. Si la matemática está llena de ramas y conceptos que no tuvieron futuro, no caben dudas que todas las ciencias están llenas de senderos muertos, e intentos de abarcar la realidad por caminos que resultaron pobres, o que si bien permitían conocer una pequeña parcela no lograban pasar el laberinto por el que anduviera la ciencia en algún período o rama.

Tomo como un error de imprenta la afirmación de que las cónicas no fueron fecundas para la matemática y otras ciencias ("muy poco, casi nada") pues parece difícil, por ejemplo, que el heliocentrismo hubiera tenido su rotunda instauración con todas sus consecuencias científicas, culturales e ideológicas, si no hubiese sido por las leyes de Kepler, que usando de las cónicas simplificaron el complejo mundo copernicano, y permitieron, ya no describir sino explicar por la gravitación newtoniana los movimientos planetarios. Es parecido a decir que el principio de conservación de la masa (Lavoisier: "nada se crea..." etc.) no ha sido fecundo por haber sido comprendido en los planteamientos de equivalencia de masa y energía (E = mc2).

6) Notas menores. a) Me cuesta asumir como propia la afirmación de que "los objetos de la lógica son conceptos sin definición" y pueden no tener existencia. Sin afán de exageración me suena demasiado parecido a decir que las leyes fundamentales de la dialéctica se refieren a hechos, procesos o fenómenos sin definir. Pienso que lo abstracto y lo no definido no deben ser confundidos, y esto lleva naturalmente a otra nota menor. [21]

b) En dos oportunidades en el apartado Crítica (ítems 1 y 4) se habla de la no existencia ("en el sentido intuitivo usual") de los objetos matemáticos, punto, recta y plano en particular. Creo que en ese sentido no existen ni el concepto de "árbol" (me refiero a "el árbol", no a "ese árbol") y ni mucho menos hablar de "átomo" o "valor de cambio". El carácter objetivo, material, de objetos que resumen propiedades comunes, esenciales (en el sentido ortodoxo) de otros objetos concretos es esencial. Y es sabido cuan fácil es para un niño comprender qué es una recta. Infinitamente más fácil que el "material" campo electromagnético.

Incluso los llamados cuerpos rígidos que estudian todas las grandes exposiciones de la mecánica ¿existen como tales? Y, ¿son reales los movimientos sin rozamiento? Para insistir con este asunto, medítese sobre esta afirmación de Einstein: la verdad en geometría se refiere a los axiomas; pero si a sus teoremas agregamos: "A dos puntos de un cuerpo prácticamente rígido corresponde siempre la misma distancia (segmento), cualquiera que sea la variación de posición experimentada por el cuerpo", la geometría se transforma en una rama de la física.

c) La afirmación de que la matemática "despega como ciencia de la física" no parece corresponderse con la historia, aunque indudablemente las necesidades de la física incentivaron en todos los tiempos el desarrollo de la matemática. A menos que llamemos física a todo lo que tiene que ver con el mundo físico. Pues fueron más bien la "agrimensura" egipcia, la astronomía mesopotámica y seguramente el incipiente comercio del primer milenio a.C. los incentivos más inmediatos para el surgimiento de la matemática, que quizá se separó (¿se despegó?) de la filosofía griega como ciencia autónoma *antes* que la física.

7) Podría ir al principio. Todo lo anterior es complementario o mejor aún una visión distinta de lo dicho anteriormente, y excepto para las salvedades explícitas y otras muy menores, creo que todo es fundible en una única disquisición sobre el tema. Releído lo escrito ahora, además, cabe decir que se intenta aquí ver las semejanzas de la matemática con las otras ciencias, sin ignorar las grandes diferencias de objetos y métodos. El hecho que el crecimiento de una planta pueda ser analizado por un nutricionista animal, un botánico y un genetista no quita que cada ciencia tenga sus especialidades y que en esta escala de creciente abstracción terminemos (?) en la matemática y/o la lógica. En la medida en que el proceso de abstracción se profundiza, el papel del pensamiento es fundamental; está claro que cuanto más nos

alejemos del conocimiento directo, más cuidadoso se ha de ser en una definición y "atribución de realidad".

Un salpicón de dudas

1) Está clara la actitud mental de Hilbert en ese esfuerzo por la aromatización de la geometría euclideana, y consiguientemente la necesidad de despojar a las "cosas" que se consideran de toda envoltura material, de velar rigurosamente por la [22] exclusión de todo lo intuitivo colado de contrabando. Con todo, a las "cosas" las llama punto, recta y plano, y no las llama, aunque bien pudiera hacerlo, alfa, beta y gamma, por ejemplo. ¿Es que el conjunto de postulados que por *definición* suponemos que cumplen esas "cosas" no arrancan en primera instancia de ese proceso de abstracción y generalización que nos permite pasar de los objetos reales, o más bien de algunas propiedades de esos objetos reales, a la formación del concepto y objeto ideal matemático que llamamos punto, recta y plano?

2) Existencia. Los objetos matemáticos, que hemos dado en llamar objetos ideales, es bien cierto que no existen en la naturaleza. No hay, en efecto, cosas, en el sentido usual de la palabra *cosa,* que satisfagan los postulados. No existen en la naturaleza puntos, rectas o planos. Hay, así, cosas que aproximadamente se pueden asimilar a los conceptos geométricos de punto, recta o plano. Pero esas cosas del mundo de la materia se reflejan en nuestra conciencia, son sometidas por el pensamiento a un proceso de abstracción, generalización y síntesis, y dan nacimiento a los objetos ideales con los que trabaja la matemática. No existen, me parece, esos objetos ideales de la matemática como reflejo en nuestra conciencia de la realidad objetiva. (Dicho sea de paso, si esto es así, ¿los podemos llamar objetos? ¿La mente crea objetos?) Pero sí existen elementos de la realidad objetiva que, reflejados en nuestra conciencia, generan, repito, por ese proceso de abstracción, generalización y síntesis, los elementos del trabajo matemático. Entonces hay un cierto límite a la libertad y la arbitrariedad de creación de nuevos entes o nuevas nociones. Podemos hacerlas surgir como consecuencia del desarrollo de las propiedades y las relaciones de entes pre-existentes o las pueden sugerir nuevos avances en el conocimiento físico de la materia, pero ya sea por una u otra vía, en última instancia se llegará a aquellas nociones primarias creadas como consecuencia de la abstracción, generalización y síntesis de los diversos aspectos de la realidad objetiva reflejados en nuestra conciencia.

3) Sugerencia y necesidad. Es bien cierto que la creación de nuevas nociones, nuevas definiciones, nuevas teorías no aparece como resultado de la *necesidad,* ni del desarrollo de la matemática misma (¿esto será tan así?), ni de las urgencias de otras ciencias (el ejemplo de Apolonio es categórico, y muy esclarecedor, además). Pero entre las necesidades y la arbitrariedad (o la libertad libre) ¿no habrá algo así como la *sugerencia?* Sugerencias del propio trabajo matemático, sugerencia de la observación del mundo de los objetos, etc. El estudio de Apolonio puede haber sido sugerido por la observación de las figuras geométricas. El cálculo diferencial aparece como una necesidad

proveniente del mundo de la física y el estudio del movimiento.

4) Decir que una demostración es matemáticamente rigurosa no tiene otro significado que decir que a partir de un conjunto de postulados se ha llegado a una conclusión aplicando correctamente las reglas del razonamiento deductivo, evitando dar por sentado nada por más intuitivamente cierto que parezca. Es cierto que lo intuitivo puede colarse, y cuando uno lo descubre, la demostración ha perdido [23] rigor y hay que rehacerla. No dudo que eso pueda suceder a menudo. Pero lo de "rigurosamente demostrado" llega hasta ahí nomás.

Por eso, postulando la operación "paso al límite", la demostración de la convergencia de una serie parecería poder ser calificada de rigurosa, matemáticamente hablando. Pero está claro que en el postulado de la validez del paso al límite está encerrado el salto dialéctico. Por eso es que me parecía que la dialéctica está presente no sólo en las leves del pensamiento creador en las que apoya todo el desarrollo de las matemáticas, sino en la matemática misma en cuanto aborda, abstrayendo, generalizando y sintetizando, valga la machaconería, los problemas de la materia en movimiento.

En efecto, hay dialéctica en el pensamiento mismo (al fin de cuentas producto de la materia en su más alto grado de organización), y también hay dialéctica en la ciencia que estudia determinados aspectos de la realidad, porque la materia actúa dialécticamente — *¿se* puede decir así?—. [24]

* Se han incorporado las correcciones pertinentes, según la fe de erratas que figura en la edición. Hay algunas pequeñas correcciones de ortografía. Los números en azul corresponden al paginado original.